

UMA ABORDAGEM DE ENSINO DAS TEORIAS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DE CONTROLE AUTOMÁTICO PARA CURSOS DE ENGENHARIA

QUIRINO, Rogério Bastos¹

RESUMO

Atualmente, existem bons livros texto de controle clássico e moderno. Entretanto, a grande maioria ainda são originalmente escritos na língua inglesa. O fato de muitos deles serem similares em escopo e conteúdo parece sugerir que a área atingiu a maturidade. Os primeiros livros de controle clássico foram publicados pouco antes da segunda guerra mundial. Já os primeiros livros de controle moderno datam do início da década de 60. Contudo, raríssimos livros dessas épocas influenciaram fortemente no desenvolvimento dessa área, pelo menos no que concerne a livros textos. Muitos tópicos convergiram para um formato padrão de apresentação, e outros foram incluídos no decorrer do tempo. O objetivo principal deste artigo é discutir sucintamente as relações intrínsecas existentes entre as técnicas empregadas na análise de estabilidade de sistemas de controle, ressaltando os aspectos de complementaridades e similitudes entre elas, mais especificamente, entre Margens de Ganho e Fase (Diagramas de Bode), Critério de Routh-Hurwitz, Critério de Nyquist, Diagrama de Nichols, Critério de Liapunov e Lugar das Raízes, visto que de forma ainda incipiente, pouco explícita e sistemática essa discussão é realizada na literatura atual. Um sistema de controle em malha fechada é utilizado como estudo de caso e a plataforma Matlab é utilizada como suporte à implementação de parte das técnicas.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Controle Clássico, Teoria de Controle Moderno, Educação em Controle, Livros Texto, História do Controle Automático.

AN TEACHING APPROACH OF THE STABILITY THEORIES OF AUTOMATIC CONTROL LINEAR SYSTEMS FOR ENGINEERING COURSES

ABSTRACT

Currently, there is good text books of modern and classical control. However, the great majority is still originally written in the English language. The fact that many of them are similar in scope and content seems to suggest that the area has reached the maturity. The first classical control books were published shortly before the second world war. Already the first modern control books dating back to the beginning of the decade of 60. However, very rare books of these epochs strongly influenced in the development of this area, at least as regards the text books. Many topics have converged to a default presentation format, and the others were included in the course of time. The main aim of this article is to discuss concisely the intrinsic relationship between the techniques used in the analysis of stability of the control systems, highlighting aspects of complementarities and similarities between them, more specifically, between Gain and Phase Margins (Bode Diagrams), Routh –Hurwitz Criterion, Nyquist Criterion, Nichols Diagram, Root-Locus and Liapunov Criterion, as in incipient fashion, poorly explicit and systematic that discussion is held in the current literature. A control system closed loop is used as a case study and Matlab platform is used to support the implementation of part of the techniques.

KEYWORDS: Classic Control Theory, Modern Control Theory, Control Education, Text Books, Automatic Control History.

1. INTRODUÇÃO

As técnicas de ensino tanto de controle clássico como moderno têm se tornado uma importante questão nos currículos dos cursos de engenharia elétrica, e frequentemente é considerada em currículos de outras engenharias. O número expressivo de bons livros texto para o ensino do assunto indica claramente o fato de que o campo da teoria de controle encontra-se bem consolidado.

¹ Docente e Pesquisador no Curso de Engenharia Elétrica da UNEMAT. E-mail: rb_quirino@hotmail.com

Como ocorre com a maioria das disciplinas, quando os primeiros livros de controle surgiram, o conteúdo estava muito mais associado a um campo de pesquisa específico do que a um curso para sala de aula. Portanto, os primeiros livros em controle eram muito diferentes dos livros texto mais populares atuais.

A despeito de ser uma disciplina relativamente jovem, muitos livros devotaram-se a tão chamada *teoria de controle clássico* que caracteriza-se pela restrição em abranger somente sistemas monovariáveis (SISO systems) e no domínio da frequência (frequency domain).

Já a teoria de controle moderno teve seu início na década de 50, e é baseada na abordagem elaborada pelos engenheiros da indústria aeroespacial, a exemplo das formulações de equações diferenciais gerais desenvolvidas pelo matemático francês Henri Poincaré, detém-se na representação dos sistemas estudados como um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, abordagem conhecida como espaço de estados (state-space approach).

Com o advento dos computadores digitais na década de 60, a teoria de controle moderno baseada na análise e síntese no domínio do tempo utilizando variáveis de estado, possibilitando, por exemplo, a representação de sistemas multivariáveis (MIMO systems), foi amplamente desenvolvida à modelagem e controle de plantas modernas inerentemente complexas.

Estabilidade é um dos temas mais antigos nas ciências básicas e aplicadas. Muitos matemáticos e físicos do século 18 estudaram a questão da estabilidade de um sistema dinâmico, e Routh, Maxwell, Liapunov, Hurwitz e Schur são alguns dos nomes mais frequentemente associados com este tema.

2. METODOLOGIA

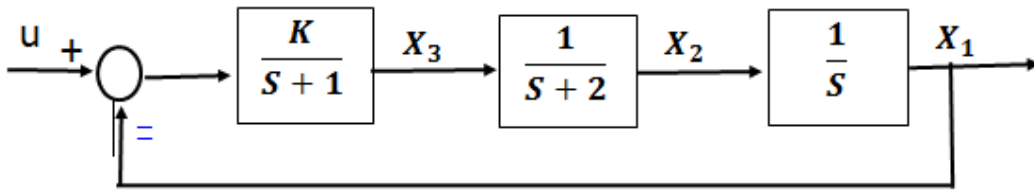
A utilização da plataforma Matlab tem como objetivo facilitar o cálculo de parte das implementações, bem como divulgar didaticamente seus ambientes e recursos utilizados.

A formulação e desenvolvimento das técnicas consideradas neste trabalho podem ser consultadas em (OGATA, 2011) e (DORF e BISHOP, 2013).

Para efeito de simplificação e sem perda de generalidade, considere um modelo de um sistema de controle proporcional de malha fechada de uma planta genérica de 3ª ordem linear e invariante no tempo, conforme mostrado na Figura 1.

A realimentação empregada é unitária e negativa, e o controlador é de natureza proporcional com ganho K.

Figura 1 – Sistema de Controle de Malha Fechada Analisado.



O sistema de controle da Figura 1 pode ser modelado matematicamente nas formas de funções de transferência de malha aberta (FTMA) e fechada (FTMF), e de espaço de estados (EE's), descritas por:

$$\text{FTMA: } \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$\text{FTMF: } \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

$$\text{EE's: } \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

A formulação do problema consiste em baseado nas representações FTMA,FTMF e EE's acima descritas, obter a faixa de ganho K do controlador proporcional que garante estabilidade do sistema de controle da Figura 1 através da aplicação das ferramentas de análise de estabilidade Margens de Ganho e Fase obtidos a partir do Diagramas de Bode, Critério de Routh-Hurwitz, Critério de Nyquist, Diagrama de Nichols, Critério de Liapunov e Lugar das Raízes, analisando as implicações e efeitos resultantes da aplicação de cada uma delas e suas inter-relações ao estudo de estabilidade do sistema de controle considerado .

3. ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

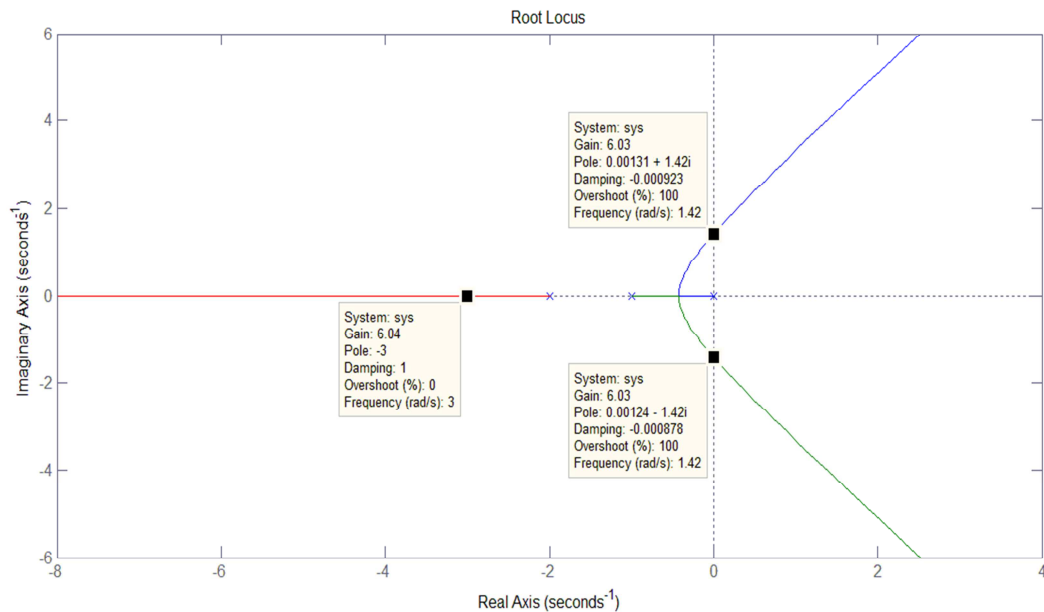
3.1 LUGAR DAS RAÍZES

O método do lugar das raízes auxilia o projetista de um sistema de controle no entendimento das propriedades de robustez e estabilidade de um controlador em torno de um ponto de operação. Ele consiste num importante método gráfico à análise e projeto de sistemas de controle.

A Figura 2 mostra o trajeto dos 3 pólos de malha fechada que são as raízes do polinômio do denominador $S^3 + 3S^2 + 2S + K$ da função de transferência de malha fechada, quando K varia de zero a infinito. Quando $K = 0$, recai-se nos pólos do sistema de malha aberta. Da Figura 2 pode-se depreender que, quando K varia de zero a infinito, os pólos complexo conjugado dominantes de 2ª ordem cruzam o eixo imaginário para o semiplano direito complexo (SPDC), instabilizando o controle do sistema. O valor de K que aloca os pólos dominantes sobre o eixo imaginário, que é o limite da estabilidade, é $K=6$. O programa na plataforma Matlab para simulação do lugar das raízes pode ser escrito sequencialmente como $n=[1];d=[1 \ 3 \ 2 \ 0]; rlocus(n,d)$, onde n e d são os polinômios do numerador e denominador, respectivamente, da FTMA, desconsiderando a incorporação do controlador no caminho direto do diagrama da Figura 1.

É importante notar na Figura 2 que quando o ganho proporcional do sistema controlado aproxima-se a esquerda de $K = 6$, o sistema fica mais suscetível a instabilidade, já que os pólos dominantes aproximando-se do eixo imaginário, podem cruzar mais facilmente a fronteira entre os semiplanos esquerdo e direito complexos (SPEC e SPDC), caracterizando menos robustez a variações e perturbações do sistema controlado.

Figura 2 – Lugar das Raízes do Sistema da Figura 1



3.2 CRITÉRIO DE NYQUIST

O critério de Nyquist estabelece uma relação entre Z , denominado número de pólos do sistema de malha fechada no SPDC, P , denominado número de pólos do sistema de malha aberta no SPDC, e N , denominado número de envolvimentos no sentido horário do ponto -1 no mapeamento de malha aberta, tal que $Z=N+P$. A condição necessária e suficiente para estabilidade assintótica é que Z seja nulo.

Para o sistema dado pela Figura 1, $P=0$, e quando $0 \leq K < 6$ implica em $N=0$, como mostrado na Figura 3, de forma que a resposta do sistema controlado é assintoticamente estável. O ponto de envolvimento que ocorre na Figura 3, se dá a partir de aproximadamente $-0,1667$, conforme mostrado na Figura 3.1 em detalhe, quando $K= 6$, tornando o sistema marginalmente estável, de forma que a distância possível de ser percorrida no eixo real para que ocorra o envolvimento do ponto -1 no traçado de Nyquist é dado por $(1/0,1667) \approx 6$, que vem a ser exatamente o ganho limite para garantia da estabilidade. Quando $K > 6$, N passa a ser 2, e conseqüentemente Z passa a ser 2, já que P continua sendo nulo, instabilizando com dois pólos de malha fechada no SPDC o sistema até então controlado. O programa na plataforma Matlab para simulação do traçado de Nyquist pode ser escrito na forma sequencial: $n=[1];d=[1 \ 3 \ 2 \ 0]; nyquist(n,d)$.

Figura 3 – Diagrama de Nyquist do Sistema da Figura 1

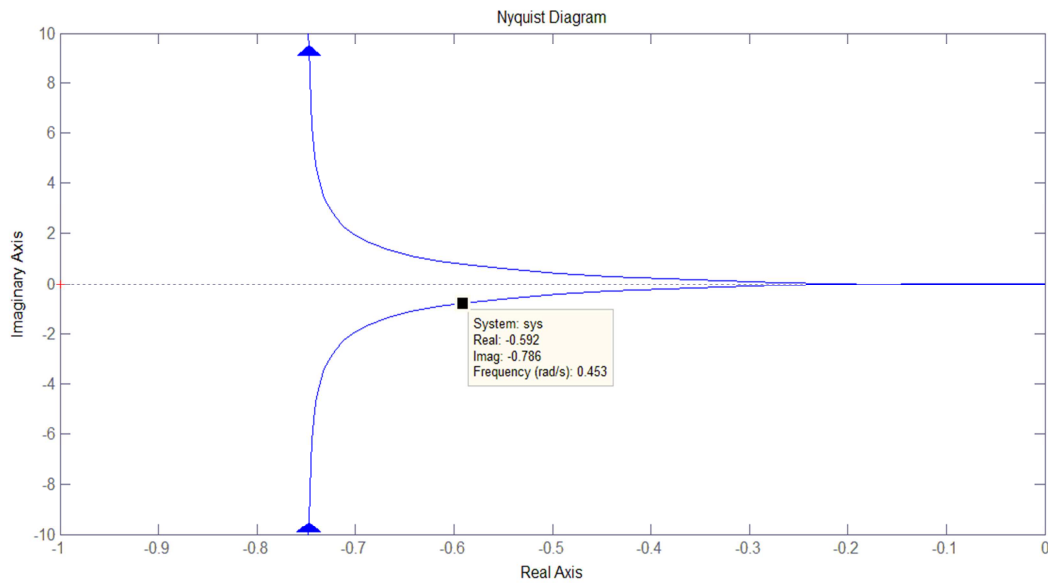
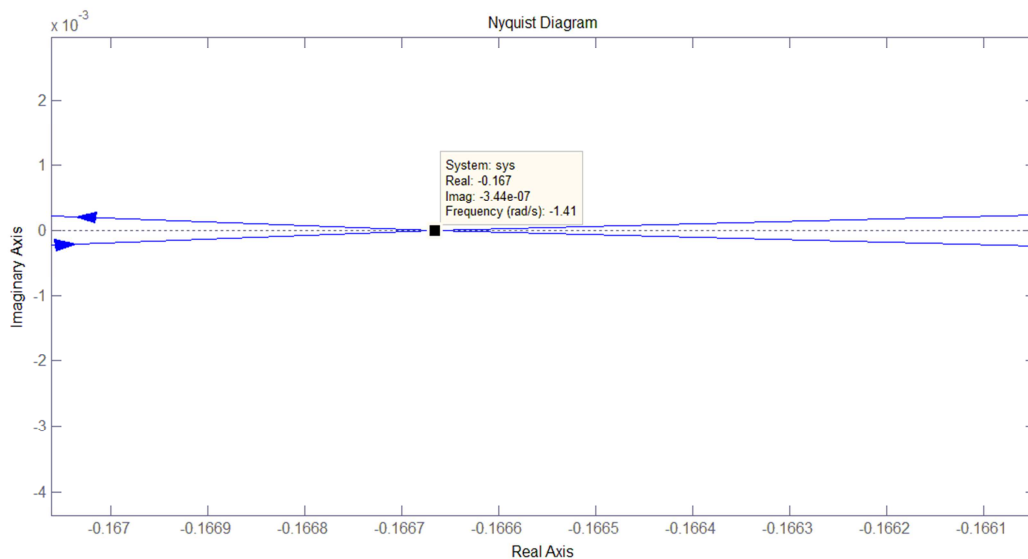


Figura 3.1 - Diagrama de Nyquist do Sistema da Figura 1 no ponto real -0,1667.



3.3 MARGENS DE GANHO E FASE (Diagramas de Bode)

A margem de ganho, baseado no espectro de frequência, fornece uma medida de quão o sistema estável é. Tal medida traz informação de quão o sistema de controle é imune às variações de parâmetros ou perturbação antes de se instabilizar. As margens de ganho e fase são obtidas através do traçado dos diagramas de Bode.

Na Figura 4 pode ser visualizada a margem de ganho de 15,6 dB na frequência de 1,41 rad/s e margem de fase de 53° na frequência de 0,466 rad/s. O valor exato da fase de 53,4 graus, $180^\circ - 126,6^\circ$, pode ser visualizado na Figura 4.1 que é a ampliação do diagrama da Figura 4 no ponto de fase -127° . O programa na plataforma Matlab para simulação das margens de ganho e fase pode ser escrito na forma sequencial: `n=[1];d=[1 3 2 0]; margin(n,d)`.

Figura 4 – Diagramas de Bode do Sistema da Figura 1

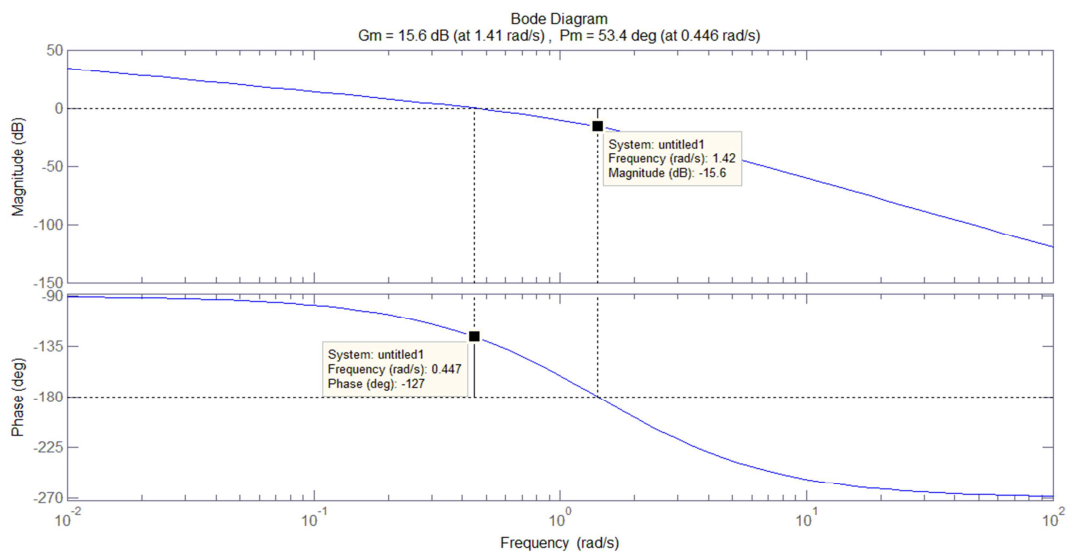
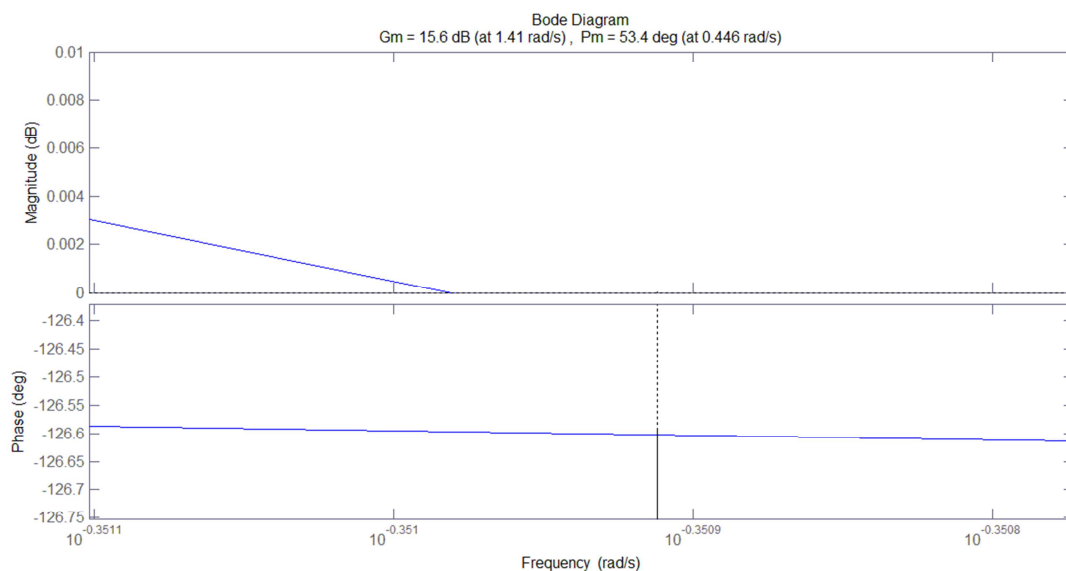


Figura 4.1 – Diagramas de Bode do Sistema da Figura 1 ampliado no ponto de fase -127°



3.4 DIAGRAMA DE NICHOLS

O diagrama de Nichols na Figura 5 mostra o valor da margem de ganho de 15,6 dB na frequência de 1,42 rad/s. A margem de fase é de aproximadamente 53 graus estabelecida na diferença entre as fases descritas nas caixas de texto marcadas nos dois pontos em negrito da Figura 5. O valor exato da fase de 53,4 graus, $180^\circ - 126,6^\circ$, obtida via diagramas de Bode na Figura 4 pode ser visualizado na Figura 5.1 que é a ampliação do diagrama da Figura 5 no ponto de fase -127° . O programa na plataforma Matlab para simulação do diagrama de Nichols pode ser escrito na forma sequencial: `n=[1];d=[1 3 2 0];H=tf(n,d);Nichols(H)`.

Figura 5 – Diagrama de Nichols do Sistema da Figura 1

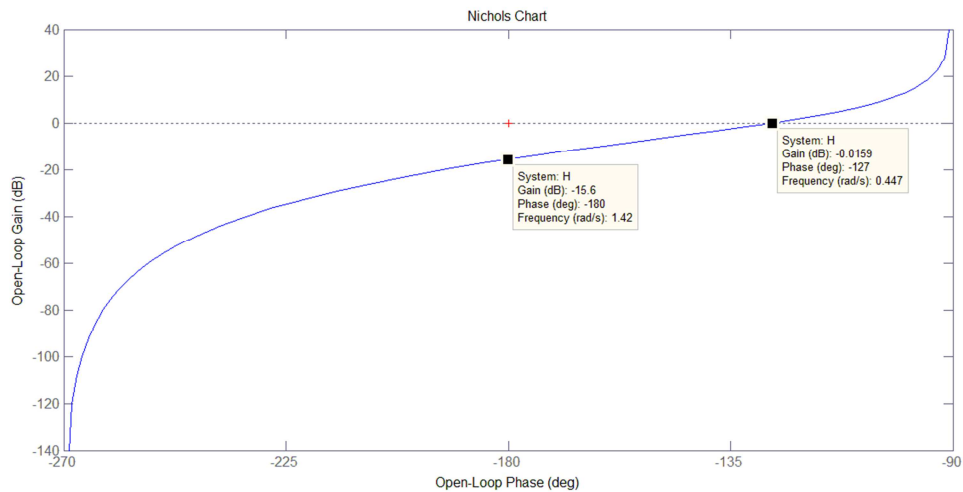
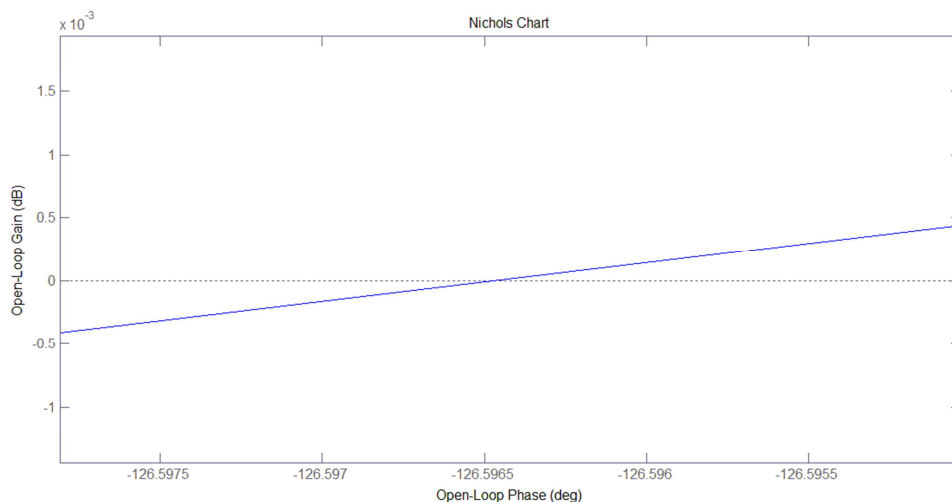


Figura 5.1 – Diagrama de Nichols do Sistema da Figura 1 ampliado no ponto de Fase -127°



3.5 CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Este critério apresenta a vantagem de dispensar o cálculo explícito dos pólos do sistema de malha fechada. Usando este método podemos dizer quantos pólos do sistema de malha fechada estão no SPDC, SPEC ou sobre o eixo imaginário $j\omega$. Note que o critério estabelece quantos, mas não onde os pólos estão localizados.

Baseado na tabela da Figura 6, o critério estabelece que a condição de necessidade e suficiência para estabilidade assintótica é que todos os elementos da primeira coluna da tabela da Figura 6 sejam positivos, significando que todos os pólos da FTMF estão no SPEC, onde $a=(6-K)/3$, $b=0$ e $c=K$. Portanto, considerando que o ganho do controlador assume somente valores positivos, então a condição de necessidade e suficiência para que o sistema dado pela Figura 1 seja assintoticamente estável é que $0 < K < 6$.

Figura 6 – Tabela de Routh-Hurwitz do Sistema da Figura 1

S^3	1	2
S^2	3	K
S^1	a	b
S^0	c	

3.7 CRITÉRIO DE LIAPUNOV (2º. Método de Liapunov)

A garantia de estabilidade assintótica estabelecida pelo critério de Liapunov, baseia-se na escolha de uma função de Liapunov candidata denominada $\dot{V}(X)$. Fazendo $u=0$ no sistema da Figura 1, baseado no princípio da superposição, $\dot{V}(X) = -X^T Q X$ deve ser selecionada com uma matriz Q admissível, tal que $\dot{V}(X)$ seja não nula, exceto na origem, onde $X = X_1 X_2 X_3^T$ é o vetor de estados da representação EE's.

Referente à admissibilidade de Q, considere quando $u=0$ a representação no espaço de estados reescrita da seguinte forma:

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (1)$$

$$\dot{X}_2 = -2X_2 + X_3 \quad (2)$$

$$\dot{X}_3 = -KX_1 - X_3 \quad (3)$$

Das equações de (1) a (3), nota-se que a origem é um estado de equilíbrio. A escolha de uma matriz real simétrica semidefinida positiva

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

é admissível visto que $\dot{V}(X) = -X^T Q X$ é não nula exceto na origem.

Para verificar isto, note que:

$$\dot{V}(X) = -X^T Q X = -X_3^2$$

$\dot{V}(X)$ sendo nula, implica em X_3 nulo. Se X_3 é nulo, então X_1 deve ser nulo, visto que da equação (3) obtém-se:

$$0 = -K X_1 - 0$$

Se X_1 é igualmente nulo, então X_2 deve ser nulo, visto que da equação (1)

$$0 = X_2$$

Portanto, a matriz Q definida na equação (4) pode ser utilizada na análise de estabilidade, visto que $\dot{V}(X)$ é nula somente na origem.

Então, a condição necessária e suficiente para estabilidade assintótica é que a equação de Liapunov $A^T P + P A = -Q$ seja satisfeita com P definida positiva.

Portanto, analisando a estabilidade do sistema de controle mostrado na Figura 1, considere a Q simétrica real semidefinida positiva admissível dada na equação (4) e uma matriz P qualquer, procurando satisfazer $A^T P + P A = -Q$, resulta em:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esta equação para os elementos de P, resulta em:

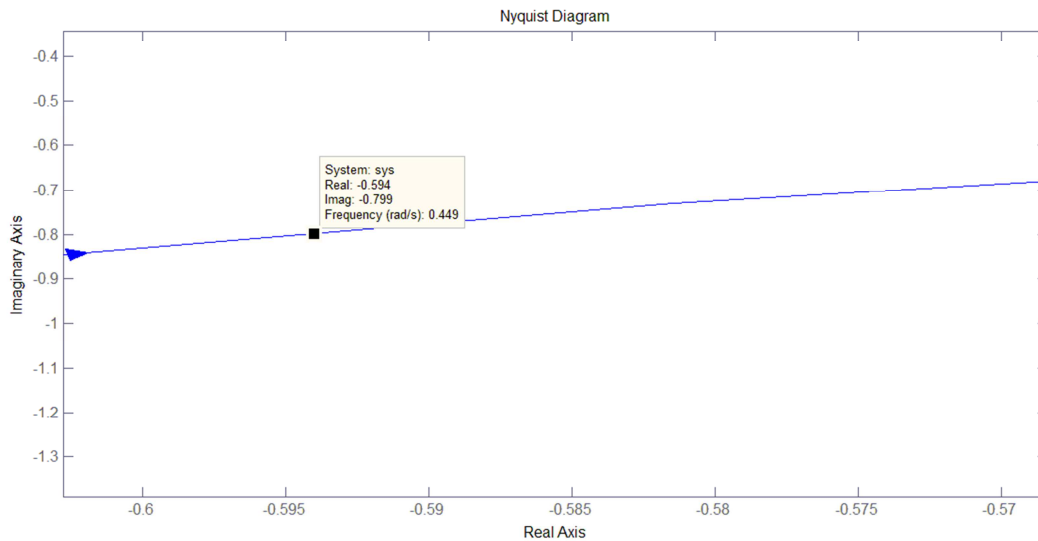
$$P = \begin{bmatrix} \frac{K^2+12K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} & 0 \\ \frac{6K}{12-2K} & \frac{12-2K}{3K} & \frac{K}{12-2K} \\ 0 & \frac{K}{12-2K} & \frac{6}{12-2K} \end{bmatrix},$$

para que o sistema controlado dado em questão atenda a equação de Liapunov.

Para satisfação de P definida positiva, ou seja, $|P|>0$, garantindo a estabilidade assintótica do sistema controlado, a inequação $0 < K < 6$ deve ser válida. Este é o intervalo de ganho do controlador proporcional que garante a estabilidade do sistema de controle estudado na Figura 1, em concordância com os resultados apresentados pela aplicação das ferramentas anteriormente tratadas.

A relação existente entre ferramentas desenvolvidas por Nyquist, Nichols, Bode, Lugar das Raízes, Routh-Hurwitz e Liapunov, ocorre considerando, dentre vários outros aspectos, que: 1) A margem de ganho está associada a distância permissível a ser percorrida sobre o eixo real ao envolvimento do ponto real -1 em Nyquist sem desestabilizar o sistema, e é calculada como $20 \cdot \log(k)$ que é 15,6 dB quando $k=6$. A desestabilização ocorre a partir de $w= 1,41$ rad/s; 2) A margem de fase é o ângulo formado entre o vetor de módulo unitário em $w=0,446$ rad/s no traçado de Nyquist da Figura 3 e o vetor unitário no ponto -1 no eixo real. Esta similaridade angular é obtida no traçado de Nyquist pela relação trigonométrica $\text{tg}(0,799/0,594) \approx 53,4^\circ$. É importante notar que o vetor formado da origem ao ponto em negrito da Figura 7 com fase de aproximadamente 53,4 graus tem aproximadamente módulo unitário, satisfazendo a equação característica de malha fechada do critério de Nyquist $1 + GH = 0$.

Figura 7 – Diagrama de Nyquist do Sistema da Figura 1 no ponto de $1+GH=0$.



Os métodos de Lugar das Raízes, Routh-Hurwitz, Nyquist, Nichols e Bode, são baseados na representação do sistema no domínio da frequência, mais especificamente na representação por funções de transferência, enquanto o critério de Liapunov toma como base a representação do sistema no espaço de estados no domínio do tempo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O entendimento unificado em escopo e filosofia das teorias de análise de estabilidade é extremamente relevante àqueles que ensinam e projetam controle em vários níveis e motivacional aos estudantes de engenharia.

Portanto, o trabalho contribui plenamente ao ensino da disciplina de sistemas automáticos de controle nos cursos de engenharia, na medida em que ele oferece uma perspectiva de metodologia através da visão sistematizada de conteúdos, conduzindo os alunos e futuros profissionais de engenharia à reflexão madura e útil sobre tais conteúdos.

Aspectos adicionais importantes das relações intrínsecas existentes entre as ferramentas de análise tratadas neste trabalho serão ainda mais detalhadamente explorados e discutidos em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 12. ed. São Paulo: LTC, 2013.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2011.